0.2. Coloquios.

0.2.1. Coloquio 01/07/03.

Análisis II
Coloquio
01/07/03

---

1. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\iiint\limits_D \nabla \cdot F \, dx\, dy\, dz = 3$, siendo D la región descripta por $0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1$, calcular el flujo de F a través de S, siendo S la superficie cilíndrica (sin tapas!) descripta, en coordenadas cilíndricas, por $\rho = 1, 0 \leq z \leq 1$, orientada de manera que el vector normal se dirija hacia afuera del cilindro.

---

2. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en R, calcular la circulación de F a lo largo de la curva parametrizada por $(\operatorname{sen} t, 1, \cos t)$, con t variando desde 0 hasta π.

---

3. Sea $R \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2y \geq 0$. Hallar el área de la proyección de R sobre el plano yz.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. El plano tangente en el punto $(1,2,3)$ a la superficie en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $z = f(x,y)$ (siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable) tiene ecuación $3x - 2y + 2z = 5$. Cuánto vale $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$?
2. Una función C^2 $z = f(x,y)$ tiene máximo relativo 3 en $(1,2)$. Hallar una ecuación del plano tangente en $(1,2,4)$ a la superficie de ecuación $z = f(x,y) + x^2$.
3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 que satisface $\nabla f(1,2) = (1,0)$, y cuya matriz Hessiana en $(1,2)$ es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Hallar a de manera que la función $g(x,y) = f(x,y) + ax + (y-2)^2$ tenga extremo en $(1,2)$. Qué tipo de extremo es?

---

5. Una mariposa ingrávida (es decir sin peso) está posada en el punto $(1/2, 0, -1/3)$ (en metros) y se deja llevar por el viento, que pasa por cada punto (x,y,z) con velocidad $(z,x,0)$ (en metros sobre segundo). Hallar y dibujar aproximadamente la trayectoria de la mariposa.

0.2.2. Coloquio 08/07/03.

Análisis II
Coloquio
08/07/03

---

1. Sea $F(x, y, z) = (P(x, y, z), 5, R(x, y, z))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en D, calcular la circulación de $G(x, y, z) = (P(x, y, z), 3x, zR(x, y, z))$ a lo largo de la curva de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4, z = 1$ en la dirección tal que la proyección sobre el plano x, y está positivamente orientada.

---

2. Sea $F(x, y, z) = (P(x, y, z), 5, R(x, y, z))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en D, calcular, usando el teorema de la divergencia, el flujo de $G(x, y, z) = (x^3 + R(x, y, z), y^3 - P(x, y, z), z^3 - P(x, y, z))$ sobre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

---

3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por $x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 - 2z \leq 0, x \leq 0, y \leq 0$. Hallar el flujo a través de S del campo $F(x, y, z) = (x, y, z^2)$ con S orientada de manera que la coordenada y de su vector normal resulte positiva.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. Una función C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(1+t, 2-t))(0) &= 1 \\ \frac{d}{dt}(f(1+t, 2+t))(0) &= 2 \end{aligned}$$
Cuánto vale $\nabla(f)(1, 2)$?
2. Una función C^2 $G(x, y, z)$ tiene máximo relativo 0 en $(1, 2, 3)$. Hallar una ecuación del plano tangente en $(1, 2, 3)$ a la superficie de ecuación $G(x, y, z) = 4x - y^2$.
3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 que satisface $\nabla f(2, 1) = (0, 0)$, y cuya matriz Hessiana en $(2, 1)$ es
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Hallar todos los $b \in \mathbb{R}$ de manera que la función $g(x, y) = -f(x, y) + (-1 + \frac{1}{b})(x - 2)^2$ tenga extremo en $(2, 1)$. Qué tipo de extremo es?

---

5. La fragancia de las rosas en un plano tiene intensidad $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Una abeja acude presurosa tratando de llegar a su lado. Si parte del $(2, 1)$ y sigue, en cada punto, la dirección de máximo crecimiento de la fragancia, que camino seguirá y en que punto alcanzará las rosas tan ansiadas, que en $x = 3$ se encuentran alineadas?

0.2.3. Coloquio 15/07/03.

Análisis II
Coloquio
15/07/03

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2, y sea $F(x,y,z) = (f'_x(x,z), 0, x+y+f'_z(x,z))$. Calcular la circulación de F a lo largo de la curva cerrada definida por $x^2+y^2+z^2 = 25$, $y = 4$, orientada de manera que su vector tangente en $(3,4,0)$ tenga coordenada z negativa.

---

2. Sea $F(x,y,z) = (xP(x,y,z), yP(x,y,z), zP(x,y,z) - 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 100$. Suponiendo que $\iiint\limits_M \nabla \cdot F \, dx\, dy\, dz = 3$, siendo $M \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $x^2+y^2+z^2 \leq 25$, $4\sqrt{x^2+y^2} \leq 3z$, hallar el flujo de F a través del casquete esférico definido por $x^2+y^2+z^2 = 25$, $z \geq 4$, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

---

3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el paraboloide descripto por $z = x^2+y^2$, sea C el cilindro de radio 1 cuyo eje vertical pasa por $(0,2,0)$, y sea Π el plano tangente a S en el punto $(0,2,4)$. Si I es la circunferencia intersección de C con el plano $z = 0$, y para cada $(x,y) \in I$ $(x,y,h(x,y))$ está en Π, hallar el máximo valor de $h(x,y)$, $(x,y) \in I$. Mostrar gráficamente que el valor hallado es efectivamente un máximo.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. Sea $F(x,y,z) = (0,0,zR(x,y))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que el flujo de F a través del borde del cilindro definido por $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$ es 3, calcular $\iint\limits_M R(x,y)\, dx\, dy$, siendo M el disco descripto en el plano xy por $x^2+y^2 \leq 1$.

2. Sean $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos funciones C^2 tales que $\nabla F(0,1,2)$ y $\nabla G(0,1,2)$ no son colineales, de modo que las ecuaciones
$$F(x,y,z) = 0,\ G(x,y,z) = 0$$
definen, en el entorno de $(0,1,2)$, una curva C que pasa por $(0,1,2)$.
Suponiendo que $(1,-1,0)$ es tangente a C en $(0,1,2)$, calcular el determinante jacobiano
$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(0,1,2)\right|$$

3. Una función C^3 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene extremos en puntos P_1 y P_2. Calcular la circulación del campo $(f''_{xx}(x,y), f''_{xy}(x,y))$ a lo largo del segmento que va desde P_1 hasta P_2.

---

5. Sabiendo que $e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x'' + bx' + cx = 0$, hallar b y c (en $\mathbb{R}$), y encontrar todas las soluciones de $x'' + bx' + cx = t$ que satisfacen $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

0.2.4. Coloquio 05/08/03.

Análisis II
Coloquio-Tema 1
05/08/03

---

1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^2, que satisface $\nabla \times F = (0, y, 0)$. Sea $f(a,b)$ la circulación de F a lo largo del borde del rectángulo descripto por

$$y = -a^2 + b^2 x, \; -1 \leq x \leq 1, \; -1 \leq z \leq 1$$

orientado de manera que su tangente en $(0, -a^2, 1)$ tenga coordenada x negativa.
Hallar el mínimo de $f(a,b), (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

---

2. Sea F el campo vectorial definido para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ por

$$F(x,y,z) = (\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})$$

- Calcular el flujo de F a través del borde de la región descripta por $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, orientado con el normal hacia afuera.
- Calcular la divergencia de $F(x,y,z)$, para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.
- Usar lo anterior para calcular el flujo de F a través del borde de la región descripta por $4 \geq z \geq x^2 + y^2 - 4$, orientado con el normal hacia afuera.

---

3. Calcular el volumen de la región definida por $x^2 + y^2 - 6 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\int_0^4 f(t)\,dt = 1$. Calcular $\iint_D f(x^2+y^2)\,dx\,dy$ siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ el disco descripto por $x^2 + y^2 \leq 4$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2. Sabiendo que $f(x,y)$ tiene máximo, de valor 0, en el punto $(1,2)$, hallar a de manera que la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 5 + az$ sea perpendicular a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,2,0)$.

---

5. Hallar b de manera que $1/x^2$ sea solución de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + 2xy' + by = 0, \qquad x > 0$$

Hallar, con ese b, la solución general y una solución que satisfaga $y(1) = 3$, $y'(1) = -6$.

0.2.5. Coloquio 12/08/03.

Análisis II
Coloquio-Tema 1

12/08/03

---

1. Hallar a de manera que sea máximo el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través del borde (¡con tapas!) del cilindro elíptico descripto por

$$\frac{x^2}{1-\frac{4a^2}{1+4a^2}} + \frac{y^2}{1+\frac{4a^2}{1+4a^2}} \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

---

2. Sea F un campo vectorial C^2, $F(x,y,z) = (xP(x,y,z), yQ(x,y,z), z)$, y sea S el semicírculo en el plano $y = 0$ descripto por $y = 0, x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0$.
Si el flujo del rotor de F a través de S orientado de manera que su normal tenga coordenada y positiva es 4, hallar la circulación de F a lo largo del arco de circunferencia parametrizado por $\sigma(t) = (\text{sen}(t), 0, -\cos(t))$ con t desde 0 hasta π.

---

3. Calcular el área del trozo de superficie definido por $z = 3\sqrt{x^2+y^2}, x^2 + y^2 - 2y \leq 0$.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 tal que su polinomio de Taylor de grado 2 en $(2,1)$ es
$$p(x,y) = 5(x-2) + (y-1) + (x-2)^2 + (y-1)^2$$
Hallar a y b en $\mathbb{R}$ de manera que $g(x,y) = f(x,y) - ax - by$ tenga mínimo en $(2,1)$. ¿Cuánto vale el mínimo?

2. Sea C una curva regular en $\mathbb{R}^2$, positivamente orientada, que encierra una región R de área 4. Calcular $\int_C P\,dx + Q\,dy$, siendo $P(x,y) = 3x^2y + 5, Q(x,y) = x^3 - 4x - 3$.

---

5. Hallar la ecuación de una curva en $\mathbb{R}^2$ que pase por $(1,2)$ y sea ortogonal a todas las curvas de nivel de la función definida por $f(x,y) = 2x^3 + y$.

0.2. Coloquios.

0.2.1. Coloquio 09/12/03.

COLOQUIO ANALISIS II 09/12/03
TEMA 1

---

1. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z) - 3x, -x(z-2)Q(x,y,z), xyQ(x,y,z))$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 100$. Suponiendo que $\iiint_D \nabla \cdot F\, dx\, dy\, dz = 3$, siendo D la región descripta por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}, y^2+z^2-4z \leq 0$, calcular el flujo de F a través de S, siendo S la superficie descripta por $z = \sqrt{x^2+y^2}, y^2+z^2-4z \leq 0$, orientada de manera que la componente z de su vector normal sea positiva.

---

2. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), xy+1)$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 100$. Suponiendo que $\nabla \times F = (1,1,0)$ en D, calcular la circulación de F a lo largo de la curva en el plano $x = y$, parametrizada por $(\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \cos t)$, con t variando desde 0 hasta π.

---

3. Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $0 \leq z \leq 1, x^2+4y^2-z^2 \leq 1$. Hallar el área de la proyección de D sobre el plano yz. Ilustrar gráficamente.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Hallar una ecuación del plano tangente en $(1,2,4)$ a la superficie de ecuación $f(x,y,z) = 3$, sabiendo que la función C^2 $w = f(x,y,z)$ tiene, sujeta a la condición $y^2-4x^2 = 0$, máximo relativo 3 en $(1,2,4)$, y que $\nabla f(1,2,4)$ es no nulo.

(**b**) Calcular la circulación del campo (x^2, y) a lo largo de la curva definida por $x = 2y^3$, desde $(0,0)$ hasta $(-2,-1)$.

---

5. Un corcho flota en la superficie de un río estacionario (es decir que la velocidad $V(x,y)$ del fluído en cada punto (x,y) de la superficie depende de su posición (x,y) pero no del tiempo). El río fluye según el campo de velocidades $V(x,y) = (1,x)$. Si el corcho pasa por el punto $(1,1)$, en que punto cortará su trayectoria a la recta $x = 2$?

0.2.2. Coloquio 16/12/03.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
16/12/03

---

1. Dada un función C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definimos $F(x, y, z) = (x + f'_y(x, y), y - f'_x(x, y), 0)$. Sea R la región en $\mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 \leq z \leq h$. Hallar $h > 0$ de manera que el flujo de F a través del borde de R hacia su exterior sea 3.

---

2. Sea $F(x, y, z) = (P(x, y, z), 4 + x^2 y, -3 + x)$ un campo vectorial C^2 en $\mathbb{R}^3$. Calcular el flujo del rotor de F a través de la superficie descripta por $z = y, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$, con el vector normal de manera que tenga componente z negativa, sabiendo que la circulación de F a lo largo de la curva parametrizada por $(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$ con t desde $-\pi/2$ a $\pi/2$ es 1.

---

3. Sea C la curva parametrizada por $(t \cos t, t \operatorname{sen} t, 3t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

(**a**) Comprobar que C está incluída en el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2/9$, y graficar aproximadamente C.

(**b**) Calcular la longitud de C.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Las curvas de nivel $f(x, y) = k$ (para $1 < k < 4$) de una función continua f son las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = \sqrt{k}$. Calcular $\iint_D f(x, y)\ dxdy$, siendo D la región en $\mathbb{R}$ descripta por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$.

(**b**) Analizar los extremos de $f(x, y) = x/2 - y^2$ en la curva descripta por $y = x, x^2 + 2y^2 < 1$.

---

5. Sabiendo que la ecuación

$$(3y^2 + 8xy^3)dx + (2xy + 6x^2y^2)dy = 0$$

tiene un factor integrante de la forma x^α, hallar α y encontrar una solución cuyo gráfico pase por $(1, 1)$.